**Definition 1:** Es sei $R$ im folgenden stets ein unendlicher, nullteilerfreier, kommutativer Hauptidealring so, daß

$$\forall\, 0 \;\neq\; I \;\trianglelefteq\; R: \;|R/I| \;<\; \infty.$$

Wir nennen eine Abbildung $f : R \to R$ *restklassenweise affin* oder kurz *rcwa*-Abbildung, wenn es ein vom Nullideal verschiedenes Ideal $I_f \trianglelefteq R$ so gibt, daß die Einschränkung von $f$ auf eine Restklasse $r + I_f \in R/I_f$ gegeben ist durch

$$n \;\mapsto\; \frac{a_r \cdot n + b_r}{c_r}$$

für gewisse $a_r, b_r, c_r \in R$.

Wir bezeichnen die Menge aller rcwa-Abbildungen des Ringes $R$ mit $\mathrm{Rcwa}(R)$, und setzen

$$\mathrm{RCWA}(R) \;:=\; \mathrm{Rcwa}(R) \cap \mathrm{Sym}(R).$$

$\mathrm{Rcwa}(R)$ ist Halbgruppe, und $\mathrm{RCWA}(R)$ ist echte Untergruppe von $\mathrm{Sym}(R)$ – Beweis elementar und einfach.

**Beispiele 1:**

$$T \in \mathrm{Rcwa}(\mathbb{Z}) : \ n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{3n+1}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\alpha \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ :

$$n \ \longmapsto \ \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{falls } n \equiv 0 \ (2), \\ \frac{3n+1}{4} & \text{falls } n \equiv 1 \ (4), \\ \frac{3n-1}{4} & \text{falls } n \equiv 3 \ (4). \end{cases}$$

$r \in \mathrm{RCWA}(\mathrm{GF}(2)[x])$ :

$$P \mapsto \begin{cases} \frac{(x^2+x+1)P}{x^2+1} & \text{falls } P \equiv 0(x^2+1), \\ \frac{(x^2+x+1)P+x}{x^2+1} & \text{falls } P \equiv 1(x^2+1), \\ \frac{(x^2+x+1)P+x^2}{x^2+1} & \text{falls } P \equiv x(x^2+1), \\ \frac{(x^2+x+1)P+(x^2+x)}{x^2+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Definition 2:** Sei $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$. Wir wählen $m_f \in R$ so, daß $\langle m_f \rangle = I_f$. Dadurch ist $m_f$ bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt. Wir setzen nun den

- **Modul** $\mathrm{Mod}(f)$ von $f$ gleich $|m_f|$, den

- **Multiplikator** $\mathrm{Mult}(f)$ von $f$ gleich $|\operatorname{kgV}_r a_r|$, den

- **Divisor** $\mathrm{Div}(f)$ von $f$ gleich $|\operatorname{kgV}_r c_r|$, und die

- **Primteilermenge** $\mathcal{P}(f)$ von $f$ gleich der Menge der Primteiler des Produktes $\mathrm{Mod}(f) \cdot \mathrm{Mult}(f) \cdot \mathrm{Div}(f)$. (Hauptidealringe sind ZPE-Ringe!)

$|x|$: 'standard-assoziiertes' Element zu $x \in R$.

**Lemma 1 (Komposita von rcwa-Abb.):**
Sind $f$ und $g$ rcwa-Abbildungen eines Ringes $R$, so ist $f \cdot g$ ebenfalls eine rcwa-Abbildung von $R$, und es gilt

1. $\mathrm{Div}(f) | \mathrm{Mod}(f)$,
2. $\mathrm{Mod}(f \cdot g) | \mathrm{Mod}(f) \cdot \mathrm{Mod}(g)$,
3. $\mathrm{Mult}(f \cdot g) | \mathrm{Mult}(f) \cdot \mathrm{Mult}(g)$,
4. $\mathrm{Div}(f \cdot g) | \mathrm{Div}(f) \cdot \mathrm{Div}(g)$,
5. $\mathcal{P}(f \cdot g) \subseteq \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$,
6. $p \in R$ prim $\wedge\ p | \mathrm{Mult}(f) \wedge p \nmid \mathrm{Div}(g)$
   $\Rightarrow p | \mathrm{Mult}(f \cdot g)$,
7. $p \in R$ prim $\wedge\ p | \mathrm{Div}(f) \wedge p \nmid \mathrm{Mult}(g)$
   $\Rightarrow p | \mathrm{Div}(f \cdot g)$,
8. $f$ surjektiv $\wedge\ p \in R$ prim $\wedge\ p \nmid \mathrm{Mult}(f)$
   $\wedge\ p | \mathrm{Div}(g) \Rightarrow p | \mathrm{Div}(f \cdot g)$, und
9. $f$ surjektiv $\wedge\ p \in R$ prim $\wedge\ p \nmid \mathrm{Div}(f)$
   $\wedge\ p | \mathrm{Mult}(g) \Rightarrow p | \mathrm{Mult}(f \cdot g)$.

**Lemma 2 (Inverse von rcwa-Abb.):**
Ist $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$, so auch $\sigma^{-1}$, und es gilt

1. $\mathrm{Mod}(\sigma^{-1}) \,|\, \mathrm{Mult}(\sigma) \cdot \mathrm{Mod}(\sigma)$,
2. $\mathrm{Mult}(\sigma) \,|\, \mathrm{Mod}(\sigma^{-1})$,
3. $\mathrm{Mult}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Div}(\sigma)$,
4. $\mathrm{Div}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Mult}(\sigma)$, und
5. $\mathcal{P}(\sigma^{-1}) = \mathcal{P}(\sigma)$.

**Lemma 3:** Es gilt

1. Das Bild einer rcwa-Abbildung ist die Vereinigung einer endlichen Anzahl von Restklassen und einer endlichen Teilmenge von $R$.
2. Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ auf keiner Restklasse konstant, und ist $M \subseteq R$ eine Vereinigung endlich vieler Restklassen, so sind Bild und Urbild von $M$ unter $f$ ebenfalls Vereinigungen endlich vieler Restklassen.
3. Die Kardinalitäten der Mengen $R$, $\mathrm{Rcwa}(R)$ und $\mathrm{RCWA}(R)$ sind gleich.

**Definition 3:** Sei $G$ eine Gruppe. Dann nennen wir einen Homomorphismus

$$\varphi : G \to \mathrm{RCWA}(R)$$

eine *restklassenweise affine* ($R$-) *Darstellung*, oder kurz *rcwa-Darstellung*, von $G$. Ist $R = \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_\pi$, $\mathrm{GF}(q)[x]$), so nennen wir $\varphi$ auch *ganzzahlige* (*semilokal - ganzzahlige*, *modulare*) rcwa-Darstellung.

**Bemerkung 1:** Ist $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\pi, \mathrm{GF}(q)[x]\}$, so besitzt jede endliche Gruppe treue $R$-rcwa-Darstellungen.

**Definition 4:** Sei $f : R \to R$ eine rcwa-Abbildung, und $m \in R \backslash \{0\}$. Dann definieren wir den *Transitionsgraphen* $\Gamma_{f,m}$ *von* $f$ *zum Modul* $m$ wie folgt:

- Die Knoten sind die Restklassen (mod $m$).
- Es geht genau dann eine Kante von $r_1(m)$ nach $r_2(m)$, wenn es ein $n_1 \in r_1(m)$ mit $n_1^f \in r_2(m)$ gibt.

Damit ist $\Gamma_{f,m}$ ein gerichteter, i.a. nicht schlingenfreier Graph.

**Beispiel 2:** Es seien $\beta, \gamma \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$n \longmapsto \begin{cases} n^\alpha + 3 & \text{falls } n \equiv 1 \ (4), \\ n^\alpha & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{bzw.}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} n^\alpha + 3 & \text{falls } n \equiv -1 \ (4), \\ n^\alpha & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi: \ \mathrm{S}_{10} &\longrightarrow \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z}), \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8) &\longmapsto [\alpha, \beta], \\ (3\ 5\ 7\ 6\ 9\ 10) &\longmapsto [\alpha, \gamma] \end{aligned}$$

eine treue ganzzahlige rcwa - Darstellung der symmetrischen Gruppe vom Grad 10. Die Abbildung $[\alpha, \beta]$ ist gegeben durch

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \equiv 0, 2, 3, 8 \ (9), \\ 2n - 5 & \text{falls } n \equiv 1 \ (9), \\ n + 3 & \text{falls } n \equiv 4, 7 \ (9), \\ 2n - 4 & \text{falls } n \equiv 5 \ (9), \\ \frac{n+2}{2} & \text{falls } n \equiv 6 \ (18), \\ \frac{n-5}{2} & \text{falls } n \equiv 15 \ (18). \end{cases}$$

**Definition 5:**

- Wir nennen eine rcwa-Abbildung $f$ *zahm*, falls die Menge der Moduln ihrer Potenzen beschränkt ist, und *wild* anderenfalls.
- Wir nennen eine rcwa-Abbildung $f$ *flach*, falls $\mathrm{Mult}(f) = \mathrm{Div}(f) = 1$, und *ausbalanciert*, falls die Mengen der Primteiler von $\mathrm{Mult}(f)$ und $\mathrm{Div}(f)$ gleich sind. Die bijektiven flachen Abbildungen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{RCWA}(R)$, Bez.: $\mathrm{RCWA}_{\mathrm{f}}(R)$. Offensichtlich sind flache Abbildungen zahm.
- Wir nennen eine ganzzahlige oder semilokalganzzahlige rcwa-Abbildung $f$ *klassenweise ordnungserhaltend*, falls die Einschränkung auf eine beliebige Restklasse (mod $\mathrm{Mod}(f)$) ordnungserhaltend ist. Die klassenweise ordnungserhaltenden Abbildungen bilden eine Untergruppe $\mathrm{RCWA}^+(R)$ von $\mathrm{RCWA}(R)$.

  Wir nennen $f$ *monotonisierbar*, falls es ein $\sigma \in \mathrm{Sym}(R)$ so gibt, daß $f^\sigma$ monoton ist, und *rcwa-monotonisierbar*, wenn wir für $\sigma$ sogar eine rcwa-Abbildung wählen können.

**Beispiele 3:** Die Abbildung

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \equiv 0 \ (7), \\ n+1 & \text{falls } n \equiv 1,2,3,4,5 \ (7), \\ n-5 & \text{falls } n \equiv 6 \ (7) \end{cases}$$

ist flach und zu $[\alpha, \beta]$ sowie zu $[\alpha, \gamma]$ konjugiert.

Die Abbildung

$$n \longmapsto \begin{cases} 16n+2 & \text{falls } n \equiv 0 \ (32), \\ 16n+18 & \text{falls } n \equiv 1 \ (2) \\ & \text{und } n \not\equiv -1 \ (32), \\ n-31 & \text{falls } n \equiv -1 \ (32), \\ \frac{n}{16} & \text{falls } n \equiv 16 \ (32), \\ n+16 & \text{falls } n \equiv 2, 4, \ldots, 14 \ (32), \\ n-14 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt Ordnung 257.

**Satz 1:** Ist $f$ eine zahme $R$-rcwa-Abbildung und $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$, so ist $f^\sigma$ ebenfalls zahm.

**Beweis:** Da $f$ nach Voraussetzung zahm ist, können wir $m \in R \backslash \{0\}$ so wählen, daß

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{Mod}(f^n) | m,$ falls $f$ bijektiv, bzw.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Mod}(f^n) | m$ sonst.

Es gilt $\mathrm{Mod}((f^\sigma)^n) = \mathrm{Mod}(\sigma^{-1} \cdot f^n \cdot \sigma)$, und dies ist nach Lemma 1, Aussage (2) ein Teiler von $\mathrm{Mod}(\sigma^{-1}) \cdot \mathrm{Mod}(f^n) \cdot \mathrm{Mod}(\sigma)$, also nach obigem auch von $m \cdot \mathrm{Mod}(\sigma) \cdot \mathrm{Mod}(\sigma^{-1})$. Da letzterer Ausdruck nicht von $n$ abhängt, folgt die Behauptung. $\square$

**Satz 2:** Enthält der Ring $R$ unendlich viele Primelemente, so ist $\mathrm{RCWA}(R)$ nicht endlich erzeugt.

**Satz 3:** Die Gruppe $\mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ operiert hoch transitiv auf $\mathbb{Z}$.

Nach Dixon / Mortimer: Permutation Groups, Korollar 7.2A operiert damit ein etwaiger nichttrivialer Normalteiler von $\mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ ebenfalls hoch transitiv auf $\mathbb{Z}$.

**Satz 4:** Die Gruppe RCWA($\mathbb{Z}$) operiert transitiv auf der Menge der von $\emptyset$ und $\mathbb{Z}$ verschiedenen Vereinigungen endlich vieler Restklassen von $\mathbb{Z}$.

**Bemerkung 2:** Für andere Ringe als $\mathbb{Z}$ ist die Aussage von Satz 4 i.a. falsch.

**Satz 5:** Ist $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$ und gibt es ein Vielfaches $m$ von $\mathrm{Mod}(\sigma)$ so, daß der Transitionsgraph $\Gamma_{\sigma,m}$ von $\sigma$ zum Modul $m$ schwache Zusammenhangskomponenten besitzt, die nicht stark zusammenhängend sind, so ist $\sigma$ wild.

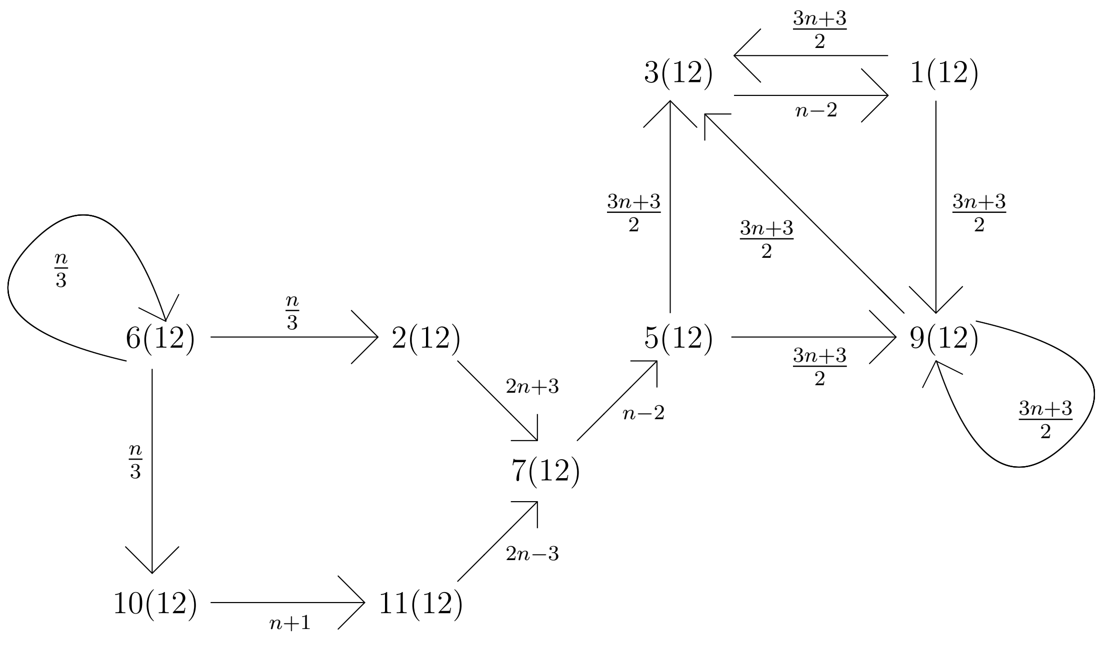
**Satz 6:** Zahme bijektive $R$-rcwa-Abbildungen sind erst recht ausbalanciert.

**Bemerkung 3:** Wir induzieren eine Topologie auf dem Ring $R$, indem wir als Basis die Menge der Restklassen wählen. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ ist dies die Topologie, die Harry Fürstenberg in seinem topologischen Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen verwendet hat. Nach Lemma 3, Aussage (2) ist RCWA($R$) nun eine Gruppe von Homöomorphismen.

## Beispiel 4:

$$\sigma \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z}),$$

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \equiv 0\ (4), \\ \frac{3n+3}{2} & \text{falls } n \equiv 1\ (4), \\ 2n+3 & \text{falls } n \equiv 2\ (12), \\ n-2 & \text{falls } n \equiv 3, 7\ (12), \\ \frac{n}{3} & \text{falls } n \equiv 6\ (12), \\ n+1 & \text{falls } n \equiv 10\ (12), \\ 2n-3 & \text{falls } n \equiv 11\ (12). \end{cases}$$



**Satz 7:** Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ surjektiv und rcwa-monotonisierbar und ist $\mathrm{Mult}(f) \neq 0$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß es höchstens endlich viele $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n^{f^k}| \geq |n|$ gibt.

**Vermutung 1:** Genau diejenigen Abbildungen $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$ sind zahm, die zu einer flachen Abbildung konjugiert sind.

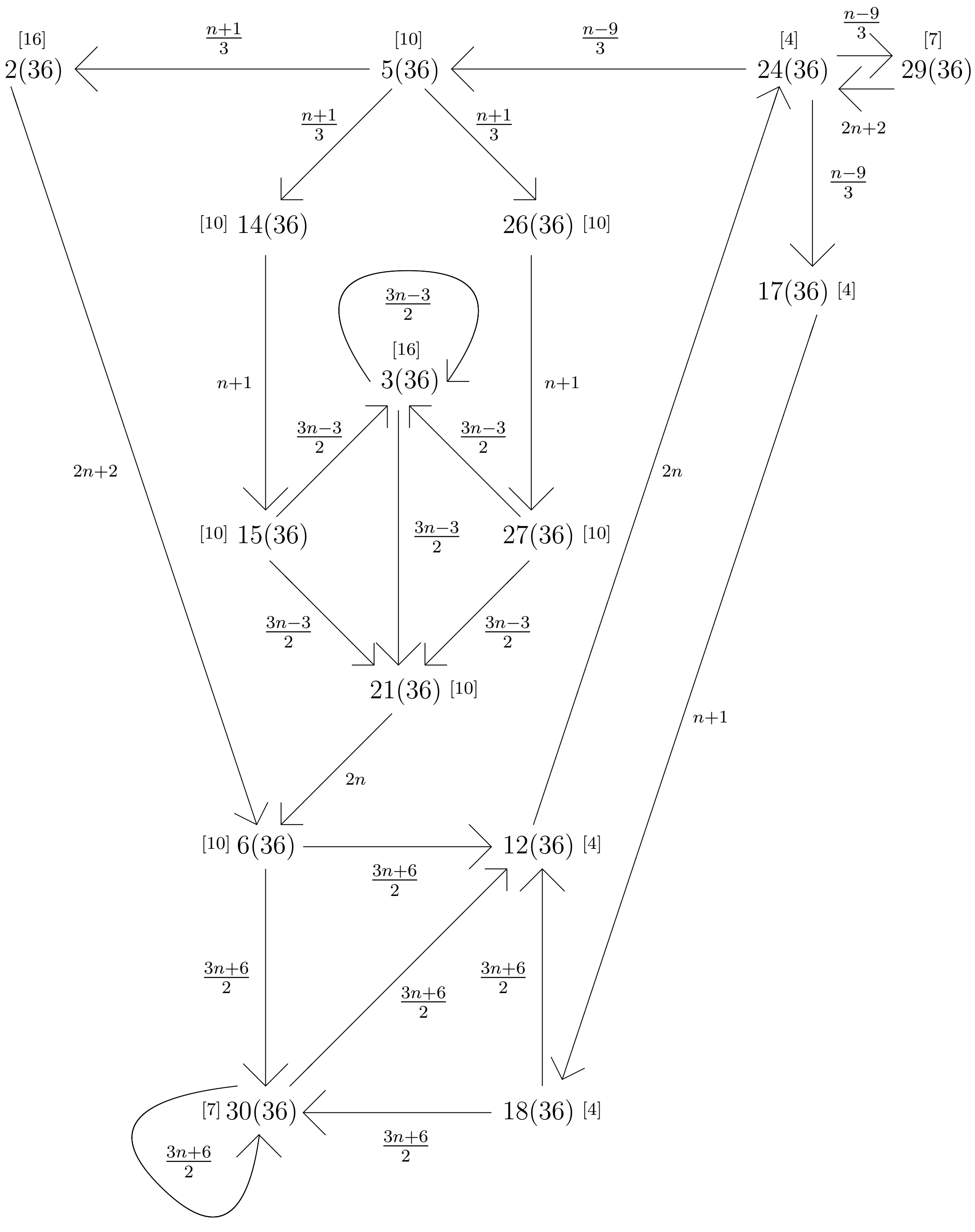
**Satz 8:** Zu geradem $r \in \mathbb{N}$ besitzt die Gruppe $\mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ unendlich viele Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung $r$. Insbesondere gibt es unendlich viele Konjugiertenklassen von Involutionen.

**Vermutung 2:** Zu ungeradem $r \in \mathbb{N}$ besitzt die Gruppe $\mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ genau so viele Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung $r$, wie es Teilmengen der Menge der Teiler von $r$ mit kleinstem gemeinsamen Vielfachen $r$ gibt.

**Beispiel 5:** Die Abbildung $\sigma \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ sei gegeben durch

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{3n-3}{2} & \text{falls } n \equiv 3 \ (12), \\ \frac{3n+6}{2} & \text{falls } n \equiv 6 \ (12), \\ \frac{n+1}{3} & \text{falls } n \equiv 5 \ (36), \\ \frac{n-9}{3} & \text{falls } n \equiv 24 \ (36), \\ 2n & \text{falls } n \equiv 12, 21 \ (36), \\ 2n+2 & \text{falls } n \equiv 2, 29 \ (36), \\ n+1 & \text{falls } n \equiv 14, 17, 26 \ (36), \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\sigma$ eine Permutation unendlicher Ordnung, besitzt jedoch vermutlich ausschließlich endliche Zykel (!).


[16] 2(36)
[10] 5(36)
[4] 24(36)
[7] 29(36)
[10] 14(36)
26(36) [10]
17(36) [4]
[16] 3(36)
[10] 15(36)
27(36) [10]
21(36) [10]
[10] 6(36)
12(36) [4]
[7] 30(36)
18(36) [4]
$\frac{n+1}{3}$
$\frac{n-9}{3}$
$2n+2$
$n+1$
$\frac{3n-3}{2}$
$2n$
$\frac{3n+6}{2}$