MAT 451: Introduction to Algebra I
Vjeshte 2011, Provim Final, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjeni rendet $|\mathrm{C}_2|$, $|\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_4|$, $|\mathrm{D}_6|$, $|\mathrm{D}_4 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{C}_3|$, $|\,\mathrm{A}_4 \times \mathrm{A}_4\,|$ dhe $|\,\mathrm{A}_5 \times \mathrm{C}_5|$. (6 pike)

Pergjigja: Ne kemi $|\mathrm{C}_2| = 2$, $|\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_4| = 8$, $|\mathrm{D}_6| = 12$, $|\mathrm{D}_4 \times \mathrm{S}_3 \times \mathrm{C}_3| = 8 \cdot 6 \cdot 3 = 144$, $|\,\mathrm{A}_4 \times \mathrm{A}_4\,| = 12^2 = 144$ dhe $|\,\mathrm{A}_5 \times \mathrm{C}_5| = 60 \cdot 5 = 300$.

2. Per secilen grup G nga listen e pare gjeni grupin H nga listen e dyte i cili eshte izomorfik me G (shembull: "ne kemi $\langle(1,2)\rangle \cong \mathrm{C}_2$"):

1. Lista e pare: $\langle(1,2,3),(3,4)\rangle$, $\langle(1,2),(1,3)\rangle$, $\langle(1,2,3,4)(5,6)\rangle$, $\langle(1,2,3,4),(1,2)(3,4)\rangle$, $\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle$, $\langle(1,2)(3,4),(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,2,3,4,5),(2,5)(3,4)\rangle$.
2. Lista e dyte: C_4, V_4, S_3, D_4, D_5, A_4, S_4.

(7 pike)

Pergjigja: Ne kemi $\langle(1,2,3),(3,4)\rangle \cong \mathrm{S}_4$, $\langle(1,2),(1,3)\rangle \cong \mathrm{S}_3$, $\langle(1,2,3,4)(5,6)\rangle \cong \mathrm{C}_4$, $\langle(1,2,3,4),(1,2)(3,4)\rangle \cong \mathrm{D}_4$, $\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle \cong \mathrm{V}_4$, $\langle(1,2)(3,4),(1,2,3)\rangle \cong \mathrm{A}_4$ dhe $\langle(1,2,3,4,5),(2,5)(3,4)\rangle \cong \mathrm{D}_5$.

3. Le te jete $G := \langle(1,3,5)(2,4,6),(1,2)\rangle < \mathrm{S}_6$.

1. Gjeni nje block sistem per veprimin e grupit G mbi bashkesine $\{1,\dots,6\}$.
2. Gjeni rendin e grupit G.

(4 pike)

Pergjigja: Nje block sistem eshte $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$, dhe rendi i grupit G eshte $2^3 \cdot 3 = 24$.

4. Gjeni nje grup $G < \mathrm{S}_6$ i cili vepron tranzitiv mbi bashkesine $\{1,2,3,4,5,6\}$ dhe i cili ka rendin 18. (3 pike)

Pergjigja: Nje grup G te tille eshte $G := \langle(1,2,3),(1,4)(2,5)(3,6)\rangle$.

5. Gjeni grupin me rendin me i madh dhe grupin me rendin me i vogel nga listen ${\mathrm{S}_4}^6$, ${\mathrm{S}_{12}}^2$, ${\mathrm{S}_3}^8$, S_{24}, ${\mathrm{S}_8}^3$, ${\mathrm{S}_6}^4$. (4 pike)

Pergjigja: Te gjithe grupet jane nengrupe te S_{24}, pra S_{24} eshte grupi me rendin me i madh. Ne kemi ${\mathrm{S}_3}^8 < {\mathrm{S}_6}^4$ dhe ${\mathrm{S}_3}^8 < {\mathrm{S}_{12}}^2$, dhe $|{\mathrm{S}_3}^8| = 2^8 \cdot 3^8 < 2^{18} \cdot 3^6 = (2^3 \cdot 3)^6 = |{\mathrm{S}_4}^6|$ dhe ${\mathrm{S}_4}^6 < {\mathrm{S}_8}^3$, pra ${\mathrm{S}_3}^8$ eshte grupi me rendin me i vogel.

6. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

   1. Nje nengrup me indeks 3 eshte gjithmon nje nengrup normal.
   2. Nese te gjithe elemente $a \neq 1$ e grupit G kane rendin 2, grupi G eshte gjithmon abelian.
   3. Nje grup G nuk mund te kete dy nengrupe $H_1 \neq H_2$ me indeks 2.
   4. Nese te gjithe nengrupe $H \lneq G$ e grupit G jane te zgjidhshme, edhe grupi G eshte i zgjidhshem.
   5. Nese nje grup $G < \mathrm{S}_5$ ka elemente me rendet 3, 4 dhe 5, ne kemi gjithmon $G = \mathrm{S}_5$.
   6. Nese nje grup G i fundem ka vetem 2 klasat e konjugimit, grupi G eshte gjithmon izomorfik me C_2.
   7. Grupi S_8 nuk ka nje nengrup me rend 22.
   8. Grupi S_7 nuk ka nje nengrup i cili eshte izomorfik me $\mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_2$.

(16 pike)

Pergjigja: Ne kemi

1. Kundershembull: Nengrupi $\langle (1,2) \rangle < \mathrm{S}_3$ me indeks 3 nuk eshte normal.
2. Vertetim: Per elemente $a, b \in G$ e cfaredoshme ne kemi $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab = abab = (ab)^2 = 1$.
3. Kundershembull: D_4 ka nengrupe C_4 dhe V_4 me indeks 2.
4. Kundershembull: A_5 eshte grupi i thjeshte jo-abelian me i vogel, pra te gjithe nengrupe te tij jane te zgjidhshme.
5. Vertetim: Nese nje grup $G < \mathrm{S}_5$ ka elemente me rendet 3, 4 dhe 5, rendi i tij eshte i pjesetueshem me 60. Nengrupi i vetme e S_5 me rend 60 eshte A_5, por ne dime se A_5 nuk ka elemente me rend 4. Pra $G = \mathrm{S}_5$.
6. Vertetim: Ne rast se G ka vetem 2 klasat e konjugimit, numrat elementeve te tyre jane 1 dhe $|G| - 1$, dhe te dyja pjesetojne $|G|$. Por $|G| - 1$ pjeseton $|G|$ vetem ne rast se $|G| - 1$ pjeseton 1, pra $|G| = 2$ dhe $G \cong \mathrm{C}_2$.
7. Vertetim: Ne kemi $22 = 2 \cdot 11$, dhe 11 nuk pjeseton $|\,\mathrm{S}_8\,| = 8!$.
8. Kundershembull: Nengrupi $\langle (1,2,3)(4,5), (6,7) \rangle < \mathrm{S}_7$ eshte izomorfik me $\mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_2$.