

# MAT 451: Introduction to Algebra I

## Vjeshte 2011, Provim 1, Pergjigje

Stefan Kohl

### 1. Gjeni

1.  $(1, 2) \cdot (1, 3) \cdot (1, 4)$ .
2.  $(1, 2, 3)(4, 5, 6, 7) \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ .
3.  $(1, 2, 3, 4, 5)^{-1}$ .
4.  $(1, 3, 5, 7)^{(1,2,3,4,5,6,7,8)}$ .
5.  $((1, 3, 5)(2, 4, 6, 8))^{27}$ .
6.  $[(1, 2, 3), (2, 3, 4)]$ .
7.  $\text{sgn}((1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8))$ .
8.  $\text{ord}((1, 2, 3)(4, 5, 6, 7, 8))$ .

Pergjigja: Ne kemi

1.  $(1, 2) \cdot (1, 3) \cdot (1, 4) = (1, 2, 3, 4)$ .
2.  $(1, 2, 3)(4, 5, 6, 7) \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = (1, 3, 2, 4, 6)(5, 7)$ .
3.  $(1, 2, 3, 4, 5)^{-1} = (1, 5, 4, 3, 2)$ .
4.  $(1, 3, 5, 7)^{(1,2,3,4,5,6,7,8)} = (2, 4, 6, 8)$ .
5.  $((1, 3, 5)(2, 4, 6, 8))^{27} = (2, 8, 6, 4)$ .
6.  $[(1, 2, 3), (2, 3, 4)] = (1, 4)(2, 3)$ .
7.  $\text{sgn}((1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8)) = -1$ .
8.  $\text{ord}((1, 2, 3)(4, 5, 6, 7, 8)) = 15$ .

### 2. Gjeni permutacione $a$ dhe $b$ me

1.  $(1, 2, 3, 4)^a = (1, 3, 2, 4)$ ,
2.  $((1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8))^b = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)$ .

Pergjigja: Ne kemi per shembull  $a = (2, 3)$ ,  $b = (2, 5, 3)(4, 6, 7)$ .

### 3. Le te jete $G := C_{12}$ grupi ciklik i rendit te 12.

1. A eshte  $G$  abelian?

2. Cfare jane rendet e elementeve e grupit  $G$ ?
3. Gjeni numrin e elementeve e rendit te 12 e grupit  $G$ .

Pergjigja: Grupi  $G$  eshte abelian, dhe rendet e elementeve jane 1, 2, 3, 4, 6 dhe 12. Numri i elementeve e rendit te 12 eshte  $\varphi(12) = 4$ .

4. Gjeni nengrupet e grupit  $S_4$  me rendin 4, 6, 8 si dhe 12.

Pergjigja: Ne kemi  $|V_4| = 4$ ,  $|S_3| = 6$ ,  $|D_4| = 8$  dhe  $|A_4| = 12$ .

5. Le te jete  $G$  nje grup, dhe le te jete  $a, b \in G$  elemente e cfaredoshme. Vertetoni qe elementet  $ab$  dhe  $ba$  kane te njejten rend.

Pergjigja: Ne kemi  $ab = (ba)^b$ , dhe elementet te konjuguara kane te njejten rend:  $(ab)^n = ((ba)^b)^n = ((ba)^n)^b = 1 \Leftrightarrow (ba)^n = 1$ .

6. Le te jete  $G := \langle (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 4)(2, 3)(5, 6) \rangle < S_6$ .

1. A eshte  $G$  nje grup abelian?
2. Gjeni te gjithë elemente e grupit  $G$ . – Sa eshte rendi i grupit  $G$ ?
3. Gjeni klasat e konjugimit e grupit  $G$ .
4. Gjeni koseta e djathte te nengrupit  $H := \langle (1, 3, 5)(2, 4, 6) \rangle$  ne  $G$ .
5. A eshte  $H$  nje nengrup normal i grupit  $G$ ?

Pergjigja: Ne kemi

1. Grupi  $G$  nuk eshte abelian, sepse

$$\begin{aligned} (1, 3, 5)(2, 4, 6) \cdot (1, 4)(2, 3)(5, 6) &= (1, 2)(3, 6)(4, 5), \text{ por} \\ (1, 4)(2, 3)(5, 6) \cdot (1, 3, 5)(2, 4, 6) &= (1, 6)(2, 5)(3, 4). \end{aligned}$$

2. Lista e elementeve e grupit  $G$  eshte

$$G = \{(), (1, 2)(3, 6)(4, 5), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 4)(2, 3)(5, 6), (1, 5, 3)(2, 6, 4), (1, 6)(2, 5)(3, 4)\},$$

pra  $|G| = 6$ .

3. Klasat e konjugimit e grupit  $G$  jane

$$\begin{aligned} &\{()\}, \\ &\{(1, 2)(3, 6)(4, 5), (1, 4)(2, 3)(5, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4)\} \text{ dhe} \\ &\{(1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 5, 3)(2, 6, 4)\}. \end{aligned}$$

4. Koseta e djathte te nengrupit  $H := \langle (1, 3, 5)(2, 4, 6) \rangle$  ne  $G$  jane

$$\begin{aligned} H &= \{(), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 5, 3)(2, 6, 4)\} \text{ dhe} \\ H \cdot (1, 4)(2, 3)(5, 6) &= \{(1, 4)(2, 3)(5, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4), (1, 2)(3, 6)(4, 5)\}. \end{aligned}$$

5. Ne kemi  $[G : H] = 2$ , pra  $H$  eshte nje nengrup normal i grupit  $G$ .