

MAT 451: Introduction to Algebra I

Vjeshte 2011, Provim 2, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjenerali

1. te gjithe grupet me rendin 4,
2. te gjithe grupet me rendin 6,
3. te gjithe grupet jo-abelian me rendin 8 dhe
4. te gjithe grupet me rendin 9.

Pergjigja: Grupet me rendin 4 jane C_4 dhe $C_2 \times C_2$, grupet me rendin 6 jane C_6 dhe S_3 , grupet jo-abelian me rendin 8 jane D_4 dhe Q_8 , dhe grupet me rendin 9 jane C_9 dhe $C_3 \times C_3$.

2. Gjenerali indekset $[S_4 : V_4]$, $[A_5 : D_5]$, $[S_5 : S_3]$, $[S_6 : A_5]$, $[GL(2, \mathbb{Z}) : SL(2, \mathbb{Z})]$ dhe $[GL(2, \mathbb{Z}) : Z(GL(2, \mathbb{Z}))]$.

Pergjigja: Ne kemi $[S_4 : V_4] = \frac{24}{4} = 6$, $[A_5 : D_5] = \frac{60}{10} = 6$, $[S_5 : S_3] = \frac{120}{6} = 20$, $[S_6 : A_5] = \frac{720}{60} = 12$, $[GL(2, \mathbb{Z}) : SL(2, \mathbb{Z})] = |\{-1, 1\}| = 2$ dhe $[GL(2, \mathbb{Z}) : Z(GL(2, \mathbb{Z}))] = \infty$.

3. Gjenerali centralizatore $C_{S_6}((1, 2)(3, 4)(5, 6))$ dhe $C_{A_6}((1, 2)(3, 4)(5, 6))$.

Pergjigja: Ne kemi

$$C_{S_6}((1, 2)(3, 4)(5, 6)) = \langle (1, 2), (3, 4), (5, 6), (1, 3)(2, 4), (1, 3, 5)(2, 4, 6) \rangle \text{ dhe}$$
$$C_{A_6}((1, 2)(3, 4)(5, 6)) = \langle (1, 2)(3, 4), (3, 4)(5, 6), (1, 3)(2, 4), (1, 3, 5)(2, 4, 6) \rangle.$$

4. Gjenerali normalizatore $N_{A_6}(V_4)$ dhe $N_{A_5}(D_5)$.

Pergjigja: Ne kemi

$$N_{A_6}(V_4) = \langle (1, 2)(5, 6), (1, 2, 3, 4)(5, 6) \rangle \cong S_4 \text{ dhe}$$
$$N_{A_5}(D_5) = D_5.$$

5. Gjeni te gjithë klasat e konjugimit e grupit S_6 dhe numrat e elementeve te tyre.

Pergjigja: Klasat e konjugimit jane

1. $()^{S_6}$ (1 element),
2. $(1, 2)^{S_6}$ (15 elemente),
3. $(1, 2)(3, 4)^{S_6}$ (45 elemente),
4. $(1, 2)(3, 4)(5, 6)^{S_6}$ (15 elemente),
5. $(1, 2, 3)^{S_6}$ (40 elemente),
6. $(1, 2, 3)(4, 5)^{S_6}$ (120 elemente),
7. $(1, 2, 3)(4, 5, 6)^{S_6}$ (40 elemente),
8. $(1, 2, 3, 4)^{S_6}$ (90 elemente),
9. $(1, 2, 3, 4)(5, 6)^{S_6}$ (90 elemente),
10. $(1, 2, 3, 4, 5)^{S_6}$ (144 elemente) dhe
11. $(1, 2, 3, 4, 5, 6)^{S_6}$ (120 elemente).

6. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Per grupet G dhe $H < G$, ne kemi gjithmon $N_G(H) = C_G(H)$.
2. Per grupet G dhe $H < G$, ne kemi gjithmon $H \triangleleft N_G(H)$.
3. Per grupet G dhe $H < G$, ne kemi gjithmon $N_G(H) \triangleleft G$.
4. Per grupet G dhe $H < G$, centralizatori $C_G(H)$ eshte gjithmon nje grup abelian.

Pergjigja: Ne kemi:

1. Kundershembull: $G := S_3, H := \langle (1, 2, 3) \rangle$.
2. Eshte e vertete sipas perkufizimit e normalizatorit.
3. Kundershembull: $G := S_3, H := \langle (1, 2) \rangle$.
4. Kundershembull: $G := D_4, H := Z(D_4) = \langle (1, 3)(2, 4) \rangle$.