MAT 452: Introduction to Algebra II
Pranvere 2012, Provim Final, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjeni $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{S}_4)$ dhe $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4)$. Gjithashtu, gjeni prerjen e nengrupeve 2-Sylow si dhe prerjen e nengrupeve 3-Sylow te grupit S_4. (4 pike)

Pergjigja: $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{S}_4) = \{\langle(1,2,3,4),(1,3)\rangle, \langle(1,2,4,3),(1,4)\rangle, \langle(1,3,2,4),(1,2)\rangle\}$, $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4) = \{\langle(1,2,3)\rangle, \langle(1,2,4)\rangle, \langle(1,3,4)\rangle, \langle(2,3,4)\rangle\}$. Prerja e nengrupeve 2-Sylow eshte V_4 dhe prerja e nengrupeve 3-Sylow eshte 1.

2. Gjeni nje nengrup $G < \mathrm{S}_7$ me rend 21 dhe nje nengrup $H < \mathrm{S}_8$ me rend 30. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi per shembull $G = \langle(1,2,3,4,5,6,7),(2,3,5)(4,7,6)\rangle$, dhe $H = \langle(1,2,3),(1,2),(4,5,6,7,8)\rangle$.

3. Gjeni nje njesi, nje idempotent, nje element nilpotent edhe nje element me rend 3 e unazes $\mathbb{Z}^{2\times 2}$. (4 pike)

Pergjigja: Elemente te tille jane

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Le te jete $a := 7 + 60\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$. Gjeni anasjelltin a^{-1} dhe rendin $|a|$ e elementit a. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $a^{-1} = 43 + 60\mathbb{Z}$ dhe $|a| = 4$.

5. Gjeni te gjithe idealet e unazes $R := \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Cilet jane maksimal? (4 pike)

Pergjigja: Te gjithe idealet e unazes $R := \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ jane 0, $(12+24\mathbb{Z})R$, $(8+24\mathbb{Z})R$, $(6+24\mathbb{Z})R$, $(4+24\mathbb{Z})R$, $(3+24\mathbb{Z})R$, $(2+24\mathbb{Z})R$ dhe R. Idealet maksimal jane $(2+24\mathbb{Z})R$ dhe $(3+24\mathbb{Z})R$.

6. Le te jete $I := \langle x^2y^2, x^6y, xy^6, x^8, y^8\rangle \lhd \mathbb{Z}[x,y]$ dhe $S := \{xy, x^2y, x^3y^2, xy^5, x^7y, x^6, y^7, x^{10}\}$. Gjeni $S \cap I$. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $S \cap I = \{x^3y^2, x^7y, x^{10}\}$.

7. Le te jete $K := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. Gjeni graden $[K : Q]$, dhe gjeni te gjithe automorfismet e fushes K dhe strukturen e grupit $\mathrm{Aut}(K)$. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $[K : Q] = 4$, dhe ne kemi 4 automorfisme $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Automorfismet jane caktuar nga imazhet e $\sqrt{2}$ dhe $\sqrt{3}$. Ne kemi

1. $\alpha_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\alpha_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$,
2. $\alpha_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\alpha_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$,
3. $\alpha_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\alpha_3(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, dhe
4. $\alpha_4(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\alpha_4(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

Ne kemi $\mathrm{Aut}(K) \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$.

8. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Per cdo grup G i fundem dhe cdo numer prim p, prerja e nengrupeve p-Sylow e grupit G eshte nje nengrup normal e grupit G.
2. Nje grup me rend 80 nuk eshte i thjeshte.
3. Nese R eshte nje unaze dhe $I, J \lhd R$ jane ideale, edhe $I \cup J$ eshte nje ideal.
4. Nese $p, q \in \mathbb{Z}$ jane elemente prim, gjithmon edhe te pakten nje nga elementet $pq - 1$ dhe $pq + 1$ eshte nje element prim.
5. Nese R eshte nje unaze dhe $a \in R$ eshte nje njesi, elementet a dhe a^{-1} kane te njejten rend.
6. Cdo ideal $I \lhd \mathbb{Z}[x, y]$ ka 1 apo 2 gjeneratore, i.e. ne kemi gjithmon $I = \langle a \rangle$ per nje element $a \in \mathbb{Z}[x, y]$ apo $I = \langle a, b \rangle$ per elemente $a, b \in \mathbb{Z}[x, y]$.

(12 pike)

Pergjigja: Ne kemi

1. Pohimi eshte i vertet sepse sipas theoremat Sylow, $\mathrm{Syl}_p(G)$ eshte nje klase konjugimi e nengrupeve te grupit G.
2. Pohimi eshte i vertet sepse per nje grup G te thjeshte me rend 80 ne kemi $|\mathrm{Syl}_2(G)| = 5$, por $|G| \nmid 5!$.
3. Kundershembull: $I = 2\mathbb{Z}$, $J = 3\mathbb{Z}$.
4. Kundershembull: $p = 3$, $q = 5$.
5. Pohimi eshte i vertet sepse $a^n = 1 \Leftrightarrow (a^{-1})^n = a^{-n} = (a^n)^{-1} = 1$.
6. Kundershembull: $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x, y]$.