MAT 452: Introduction to Algebra II
Pranvere 2012, Provim Final

Stefan Kohl

Data: 27.06.2012, Ora: 10:00 - 12:00

Emri, Mbiemri: ______________________________

Pergjigjuni 8 pyetje e meposhtme. Nuk i lejohet te perdore asgje pervec leter e bardhe dhe nje stilolaps. Maksimumi i pikeve te mundshme eshte 40.

1. Gjeni $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{S}_4)$ dhe $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4)$. Gjithashtu, gjeni prerjen e nengrupeve 2-Sylow si dhe prerjen e nengrupeve 3-Sylow te grupit S_4. (4 pike)

2. Gjeni nje nengrup $G < \mathrm{S}_7$ me rend 21 dhe nje nengrup $H < \mathrm{S}_8$ me rend 30. (4 pike)

3. Gjeni nje njesi, nje idempotent, nje element nilpotent edhe nje element me rend 3 e unazes $\mathbb{Z}^{2\times 2}$. (4 pike)

4. Le te jete $a := 7 + 60\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$. Gjeni anasjelltin a^{-1} dhe rendin $|a|$ e elementit a. (4 pike)

5. Gjeni te gjithe idealet e unazes $R := \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Cilet jane maksimal? (4 pike)

6. Le te jete $I := \langle x^2y^2, x^6y, xy^6, x^8, y^8\rangle \lhd \mathbb{Z}[x,y]$ dhe $S := \{xy, x^2y, x^3y^2, xy^5, x^7y, x^6, y^7, x^{10}\}$. Gjeni $S \cap I$. (4 pike)

7. Le te jete $K := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. Gjeni graden $[K : Q]$, dhe gjeni te gjithe automorfismet e fushes K dhe strukturen e grupit $\mathrm{Aut}(K)$. (4 pike)

8. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

   1. Per cdo grup G i fundem dhe cdo numer prim p, prerja e nengrupeve p-Sylow e grupit G eshte nje nengrup normal e grupit G.
   2. Nje grup me rend 80 nuk eshte i thjeshte.
   3. Nese R eshte nje unaze dhe $I, J \lhd R$ jane ideale, edhe $I \cup J$ eshte nje ideal.
   4. Nese $p, q \in \mathbb{Z}$ jane elemente prim, gjithmon edhe te pakten nje nga elementet $pq - 1$ dhe $pq + 1$ eshte nje element prim.
   5. Nese R eshte nje unaze dhe $a \in R$ eshte nje njesi, elementet a dhe a^{-1} kane te njejten rend.
   6. Cdo ideal $I \lhd \mathbb{Z}[x,y]$ ka 1 apo 2 gjeneratore, i.e. ne kemi gjithmon $I = \langle a\rangle$ per nje element $a \in \mathbb{Z}[x,y]$ apo $I = \langle a, b\rangle$ per elemente $a, b \in \mathbb{Z}[x,y]$.

(12 pike)