# MAT 452: Introduction to Algebra II
# Pranvere 2012, Provim 1, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjeni numrin e nengrupeve 2-Sylow dhe e nengrupeve 3-Sylow per secilen grup nga listen e meposhtme: $\mathrm{C}_3$, $\mathrm{S}_3$, $\mathrm{D}_4$, $\mathrm{D}_5$, $\mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_2$, $\mathrm{A}_4$, $\mathrm{S}_4$, $\mathrm{A}_5$. (Shembull: "Grupi $\mathrm{C}_2$ ka nje nengrup 2-Sylow dhe nje nengrup 3-Sylow.".) (8 pike)

Pergjigja:

1. Grupi $\mathrm{C}_3$ ka nje nengrup 2-Sylow dhe nje nengrup 3-Sylow.
2. Grupi $\mathrm{S}_3$ ka 3 nengrupe 2-Sylow dhe nje nengrup 3-Sylow.
3. Grupi $\mathrm{D}_4$ ka nje nengrup 2-Sylow dhe nje nengrup 3-Sylow.
4. Grupi $\mathrm{D}_5$ ka 5 nengrupe 2-Sylow dhe nje nengrup 3-Sylow.
5. Grupi $\mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_2$ ka nje nengrup 2-Sylow dhe nje nengrup 3-Sylow.
6. Grupi $\mathrm{A}_4$ ka nje nengrup 2-Sylow dhe 4 nengrupe 3-Sylow.
7. Grupi $\mathrm{S}_4$ ka 3 nengrupe 2-Sylow dhe 4 nengrupe 3-Sylow.
8. Grupi $\mathrm{A}_5$ ka 5 nengrupe 2-Sylow dhe 10 nengrupe 3-Sylow.

2. Le te jete $G$ nje grup abelian me rend 360. Gjeni numrin e nengrupeve 2-Sylow, 3-Sylow dhe 5-Sylow te grupit $G$. (3 pike)

Pergjigja: Grupi $G$ eshte abelian, pra te gjithe nengrupet $p$-Sylow te tij jane normal. Pra grupi $G$ ka nje nengrup 2-Sylow, nje nengrup 3-Sylow dhe nje nengrup 5-Sylow.

3. Gjeni te gjithe nengrupe $p$-Sylow per secilen grup nga listen e meposhtme, dhe per secilen numer prim i cili pjeseton rendin e grupit perkates: $\mathrm{S}_4$, $\mathrm{D}_5$, $\langle (1,2,3,4,5,6,7), (2,3,5)(4,7,6) \rangle \cong \mathrm{C}_7 \rtimes \mathrm{C}_3$. (Shembull: "Nengrupet 2-Sylow te grupit $\mathrm{S}_3$ jane $\langle (1,2) \rangle$, $\langle (1,3) \rangle$ dhe $\langle (2,3) \rangle$, dhe nengrupi 3-Sylow eshte $\langle (1,2,3) \rangle$.") (6 pike)

Pergjigja: Nengrupet 2-Sylow e grupit $\mathrm{S}_4$ jane $\langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle$, $\langle (1,2,4,3), (1,4) \rangle$ dhe $\langle (1,3,2,4), (1,2) \rangle$, dhe nengrupet 3-Sylow e tij jane $\langle (1,2,3) \rangle$, $\langle (1,2,4) \rangle$, $\langle (1,3,4) \rangle$ dhe $\langle (2,3,4) \rangle$.

Nengrupet 2-Sylow e grupit $\mathrm{D}_5$ jane $\langle (2,5)(3,4) \rangle$, $\langle (1,4)(2,3) \rangle$, $\langle (1,2)(3,5) \rangle$, $\langle (1,5)(2,4) \rangle$ dhe $\langle (1,3)(4,5) \rangle$, dhe nengrupi 5-Sylow i tij eshte $\langle (1,2,3,4,5) \rangle$.

Nengrupet 3-Sylow e grupit $\langle (1,2,3,4,5,6,7), (2,3,5)(4,7,6) \rangle$ jane $\langle (2,3,5)(4,7,6) \rangle$, $\langle (1,2,4)(3,6,5) \rangle$, $\langle (1,3,7)(2,5,4) \rangle$, $\langle (1,4,3)(2,6,7) \rangle$, $\langle (1,5,6)(2,7,3) \rangle$, $\langle (1,6,2)(4,5,7) \rangle$ dhe $\langle (1,7,5)(3,4,6) \rangle$, dhe nengrupi 7-Sylow i tij eshte $\langle (1,2,3,4,5,6,7) \rangle$.

4. Gjeni te gjithe numrat $n$ nga listen e meposhtme per te cilet ekziston nje grup te thjeshte me rend $n$: 24, 50, 60, 75, 100, 120, 144, 168, 225, 256, 300, 360. (3 pike)

Pergjigja: 60 ($\mathrm{A}_5$), 168 ($\mathrm{PSL}(2,7) \cong \mathrm{GL}(3,2)$) dhe 360 ($\mathrm{A}_6$).

5. Gjeni nje nengrup $G$ e grupit $\mathrm{S}_6$ me rend 48, dhe nje nengrup $H$ e grupit $\mathrm{S}_{13}$ me rend 39. (Shembull: "Nje nengrup e grupit $\mathrm{S}_6$ me rend 72 eshte $\langle(1,2,3),(1,3),(1,4)(2,5)(3,6)\rangle \cong \mathrm{S}_3 \wr \mathrm{C}_2$.") (4 pike)

Pergjigja: Per shembull $G = \langle(1,2),(1,3)(2,4),(1,3,5)(2,4,6)\rangle$ dhe $H = \langle(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13),(2,4,10)(3,7,6)(5,13,11)(8,9,12)\rangle$.

6. Tregoni qe nuk ekziston nje grup te thjeshte me rend 180. (6 pike)

Pergjigja: Pjesetuese te numrit 180 jane 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 dhe 180. Pra nje grup $G$ te thjeshte me rend 180 ka 10 nengrupe 3-Sylow dhe 6 apo 36 nengrupe 5-Sylow. Ne rast se grupi $G$ ka 6 nengrupe 5-Sylow, ne kemi nje monomorfizem $\varphi : G \to \mathrm{S}_6$ (veprimi i grupit $G$ me konjugimin mbi bashkesine e nengrupeve 5-Sylow), dhe grupi $\mathrm{S}_6$ vepron transitiv me shumezimin nga te djathten mbi bashkesine e kosetave te djathte te nengrupit $\operatorname{im}\varphi$ me indeks 4, kundershtim. Ne rast se grupi $G$ ka 36 nengrupe 5-Sylow, grupi ka $36 \cdot 4 = 144$ elemente me rend 5 dhe te pakten $10 \cdot (9-3) + 2 = 62$ elemente me rend 3. Por $144 + 62 = 206 > 180$, pra ne kemi nje kundershtim edhe ne kete rast. $\square$