MAT 452: Introduction to Algebra II
Pranvere 2012, Provim 2, Pergjigje

Stefan Kohl

1. A jane ekuacionet e meposhtme e vlefshme ne cdo unaze R, per elemente $a, b, c, d \in R$ e cfaredoshme?:

1. $ab = cd$.
2. $a + b = a + c$.
3. $ab(c + d) + a + b = abc + abd + a + b$.
4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(4 pike, nje per cdo pergjigje te sakte)
Pergjigja: 1.: jo, 2.: jo, 3.: po, 4.: jo.

2. Le te jete R nje unaze, dhe le te jete $a, b, c \in R$. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Nese a dhe b jane njesite, edhe ab eshte nje njesi.
2. Nese a dhe b jane njesite, edhe $a + b$ eshte nje njesi.
3. Nese a dhe b jane nilpotent, edhe ab eshte nilpotent.
4. Nese a dhe b jane nilpotent, edhe $a + b$ eshte nilpotent.

(4 pike, nje per cdo pergjigje te sakte)
Pergjigja:

1. Vertetim: nese a dhe b jane njesite, ne kemi $(b^{-1}a^{-1})ab = 1$, pra edhe ab eshte nje njesi.
2. Kundershembull: $R = \mathbb{Z}, a = b = 1$.
3. Kundershembull: $R = \mathbb{Z}^{2\times2}$, $a = E_{1,2}$, $b = E_{2,1}$.
4. Te njejten kundershembull si ne 3.

3. Gjeni te gjithe idealet e unazes $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$. Cilat jane maksimal? (4 pike)

Pergjigja: Idealet e unazes $R := \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ jane $(r + 60\mathbb{Z})R$ per te gjithe pjesetues $r|60$, pra per $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Idealet maksimal jane $(r + 60\mathbb{Z})R$ per $r \in \{2, 3, 5\}$.

4. Le te jete $R := \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Gjeni rendin e grupit $R^\times$, dhe gjeni te gjithe elemente te tij. Per secilen element $g \in R^\times$ gjeni rendin $|g|$. Gjithashtu, shkruani grupin $R^\times$ ne formen $R^\times \cong \mathrm{C}_a$ (ne rast se grupi eshte ciklik) apo $R^\times \cong \mathrm{C}_a \times \mathrm{C}_b$ apo $R^\times \cong \mathrm{C}_a \times \mathrm{C}_b \times \mathrm{C}_c$. (7 pike)

Pergjigja: Ne kemi $|R^\times| = \varphi(30) = 8$, dhe $R^\times = \{1 + 30\mathbb{Z}, 7 + 30\mathbb{Z}, 11 + 30\mathbb{Z}, 13+30\mathbb{Z}, 17+30\mathbb{Z}, 19+30\mathbb{Z}, 23+30\mathbb{Z}, 29+30\mathbb{Z}\}$. Ne kemi $\mathrm{ord}(1+30\mathbb{Z}) = 1$, $\mathrm{ord}(11 + 30\mathbb{Z}) = \mathrm{ord}(19 + 30\mathbb{Z}) = \mathrm{ord}(29 + 30\mathbb{Z}) = 2$ dhe $\mathrm{ord}(7 + 30\mathbb{Z}) = \mathrm{ord}(13 + 30\mathbb{Z}) = \mathrm{ord}(17 + 30\mathbb{Z}) = \mathrm{ord}(23 + 30\mathbb{Z}) = 4$. Tani ne dime se grupi $R^\times$ eshte abelian, ka rend 8 dhe ka 4 elemente me rend 4. Grupi $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2$ eshte i vetem grup te tille, sepse C_8 ka vetem 2 elemente me rend 4 dhe C_2^3 nuk ka elemente me rend 4.

5. Le te jete

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Z},\ b \in 2\mathbb{Z},\ c \in 3\mathbb{Z} \right\}.$$

Tregoni qe bashkesia R se bashku me operacionet + dhe $\cdot$ per matricat eshte nje unaze. Gjithashtu, gjeni te gjithe njesite dhe te gjithe idempotente e unazes R, si dhe te gjithe elemente e saj te cilet jane nilpotent. (7 pike)

Pergjigja: Shkruajme

$$M(a, b, c, d) := \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3c & d \end{pmatrix}.$$

Tani ne kemi $0 = M(0, 0, 0, 0) \in R$, $1 = M(1, 0, 0, 1) \in R$ dhe per numrat $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ e cfaredoshme ne kemi $M(a_1, b_1, c_1, d_1) - M(a_2, b_2, c_2, d_2) = M(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2) \in R$ dhe $M(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot M(a_2, b_2, c_2, d_2) = M(a_1a_2 + 6b_1c_2, a_1b_2 + b_1d_2, c_1a_2 + d_1c_2, 6c_1b_2 + d_1d_2) \in R$. Pra R eshte nje nenunaze e unazes $\mathbb{Z}^{2\times 2}$.

Njesite jane elementet $M(a, b, c, d)$ me $ad - 6bc = \pm 1$, idempotente jane $M(0, 0, 0, 0)$, $M(1, 0, 0, 1)$, $M(1, 0, 0, 0)$, $M(0, 0, 0, 1)$ etj., dhe elemente te cilet jane nilpotent jane $M(0, 0, 0, 0)$, $M(0, b, 0, 0)$ dhe $M(0, 0, c, 0)$, per numrat $b, c \in \mathbb{Z}$ e cfaredoshme.

6. Le te jete $I := \langle x + y + z, xy + xz + yz, xyz \rangle \lhd \mathbb{Z}[x, y, z]$. Tregoni qe x^3 eshte nje element e idealit I. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $x^3 = x^2 \cdot (x + y + z) - x \cdot (xy + xz + yz) + xyz \in I$.