

# MAT 452: Introduction to Algebra II

## Pranvere 2012, Provim 2

Stefan Kohl

Data: 28.05.2012, Ora: 14:00 - 15:30

**Emri, Mbiemri:** \_\_\_\_\_

Pergjigjuni 6 pyetje e meposhtme. Nuk i lejohet te perdore asgje pervec leter e bardhe dhe nje stilolaps. Maksimumi i pikeve te mundshme eshte 30.

1. A jane ekuacionet e meposhtme e vlefshme ne cdo unaze  $R$ , per elemente  $a, b, c, d \in R$  e cfaredoshme?:

1.  $ab = cd$ .
2.  $a + b = a + c$ .
3.  $ab(c + d) + a + b = abc + abd + a + b$ .
4.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

(4 pike, nje per cdo pergjigje te sakte)

2. Le te jete  $R$  nje unaze, dhe le te jete  $a, b, c \in R$ . Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Nese  $a$  dhe  $b$  jane njesite, edhe  $ab$  eshte nje njesi.
2. Nese  $a$  dhe  $b$  jane njesite, edhe  $a + b$  eshte nje njesi.
3. Nese  $a$  dhe  $b$  jane nilpotent, edhe  $ab$  eshte nilpotent.
4. Nese  $a$  dhe  $b$  jane nilpotent, edhe  $a + b$  eshte nilpotent.

(4 pike, nje per cdo pergjigje te sakte)

3. Gjeni te gjitha idealet e unazes  $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ . Cilat jane maksimal? (4 pike)

4. Le te jete  $R := \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ . Gjeni rendin e grupit  $R^\times$ , dhe gjeni te gjitha elemente te tij. Per secilen element  $g \in R^\times$  gjeni rendin  $|g|$ . Gjithashtu, shkruani grupin  $R^\times$  ne formen  $R^\times \cong C_a$  (ne rast se grupi eshte ciklik) apo  $R^\times \cong C_a \times C_b$  apo  $R^\times \cong C_a \times C_b \times C_c$ . (7 pike)

5. Le te jete

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Z}, b \in 2\mathbb{Z}, c \in 3\mathbb{Z} \right\}.$$

Tregoni qe bashkesia  $R$  se bashku me operacionet  $+$  dhe  $\cdot$  per matricat eshte nje unaze. Gjithashtu, gjeni te gjitha njesite dhe te gjitha idempotentet e unazes  $R$ , si dhe te gjitha elemente e saj te cilet jane nilpotent. (7 pike)

6. Le te jete  $I := \langle x + y + z, xy + xz + yz, xyz \rangle \triangleleft \mathbb{Z}[x, y, z]$ . Tregoni qe  $x^3$  eshte nje element e idealit  $I$ . (4 pike)