MAT 551: Algebra I
Vjeshte 2011, Provim Final, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjeni

   1. rendet $|\mathrm{V}_4|$, $|\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_6|$, $|\mathrm{D}_4 \times \mathrm{A}_4|$, $|{\mathrm{S}_3}^2 \times \mathrm{C}_3|$, $|{\mathrm{A}_4}^2 \times \mathrm{C}_2|$ dhe $|\mathrm{A}_6 \times \mathrm{C}_3|$,

   2. rendet $|\langle(1,2),(2,3),(1,3)\rangle|$, $|\langle(1,2),(3,4),(5,6)\rangle|$, $|\langle(1,2),(2,3),(4,5)\rangle|$ dhe $|\langle(1,2),(2,3),(3,4)\rangle|$.

(10 pike)

Pergjigja: Ne kemi

1. $|\mathrm{V}_4| = 4$, $|\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_6| = 3 \cdot 6 = 18$, $|\mathrm{D}_4 \times \mathrm{A}_4| = 8 \cdot 12 = 96$, $|{\mathrm{S}_3}^2 \times \mathrm{C}_3| = 6^2 \cdot 3 = 108$, $|{\mathrm{A}_4}^2 \times \mathrm{C}_2| = 12^2 \cdot 2 = 288$ dhe $|\mathrm{A}_6 \times \mathrm{C}_3| = 360 \cdot 3 = 1080$, dhe

2. $|\langle(1,2),(2,3),(1,3)\rangle| = 6$, $|\langle(1,2),(3,4),(5,6)\rangle| = 8$, $|\langle(1,2),(2,3),(4,5)\rangle| = 12$, dhe $|\langle(1,2),(2,3),(3,4)\rangle| = 24$.

2. Per secilen grup G nga listen e pare gjeni grupin H nga listen e dyte i cili eshte izomorfik me G (shembull: “ne kemi $\langle(1,2,3,4)\rangle \cong \mathrm{C}_4$”):

   1. Lista e pare: $\langle(1,2,3),(1,2,4)\rangle$, $\langle(1,2),(1,3)\rangle$, $\langle(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,2,3)(4,5)\rangle$, $\langle(1,2,3,4),(1,3)\rangle$, $\langle(1,2)(3,4)\rangle$, $\langle(1,2),(2,3),(3,4)\rangle$.

   2. Lista e dyte: C_2, C_3, C_6, S_3, D_4, A_4, S_4.

(7 pike)

Pergjigja: Ne kemi $\langle(1,2,3),(1,2,4)\rangle \cong \mathrm{A}_4$, $\langle(1,2),(1,3)\rangle \cong \mathrm{S}_3$, $\langle(1,2,3)\rangle \cong \mathrm{C}_3$, $\langle(1,2,3)(4,5)\rangle \cong \mathrm{C}_6$, $\langle(1,2,3,4),(1,3)\rangle \cong \mathrm{D}_4$, $\langle(1,2)(3,4)\rangle \cong \mathrm{C}_2$, dhe $\langle(1,2),(2,3),(3,4)\rangle \cong \mathrm{S}_4$.

3. Le te jete $G := \langle(1,2,3),(1,2,4),(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)\rangle < \mathrm{S}_8$.

   1. Gjeni nje block sistem per veprimin e grupit G mbi bashkesine $\{1,\dots,8\}$.

   2. Gjeni rendin e grupit G.

(4 pike)

Pergjigja: Nje block sistem eshte $B := \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}\}$. Ne kemi 2 blocke, pra imazhi i veprimit e grupit G mbi B eshte izomorfik me C_2. Ne kemi $\mathrm{A}_4 \cong \langle(1,2,3),(1,2,4)\rangle < G$, dhe berthama e veprimit e grupit G mbi B eshte izomorfik me $\mathrm{A}_4 \times \mathrm{A}_4$. Keshtu $|G| = 2 \cdot |\mathrm{A}_4|^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$.

4. Gjeni nje grup $G < \mathrm{S}_6$ i cili vepron tranzitiv mbi bashkesine $\{1,2,3,4,5,6\}$ dhe i cili ka rendin 72. (3 pike)

Pergjigja: Nje grup te tille eshte $G := \langle(1,2),(1,2,3),(1,4)(2,5)(3,6)\rangle$.

5. Le te jete $G := \langle(1,2)(3,4),(1,2,3,4,5,6,7,8)\rangle$. Gjeni nje block sistem per veprimin e grupit G mbi bashkesine $S := \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ apo tregoni qe grupi G vepron primitiv mbi S. (4 pike)

Pergjigja: Ka mundesite te ndryshme per pergjigjen. – Dy shembuj:

1. Nengrupi $H := \langle(1,2,3,4,5,6,7,8)\rangle < G$ ka dy block sisteme: $B_1 := \{\{1,3,5,7\},\{2,4,6,8\}\}$ dhe $B_2 := \{\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\}\}$. Por ne kemi $\{1,3,5,7\}^{(1,2)(3,4)} \cap \{1,3,5,7\} = \{5,7\}$ dhe $\{1,5\}^{(1,2)(3,4)} \cap \{1,5\} = \{5\}$. Keshtu as B_1 as B_2 eshte nje block sistem per veprimin e grupit G, dhe veprimi eshte primitiv.

2. Ne rast se veprimi i grupit G nuk eshte primitiv, ne kemi dy mundesite:

   (a) Ne kemi 2 blocke me 4 pike. Ne kete rast rendi i grupit G pjeseton $(4!)^2 \cdot 2! = 24^2 \cdot 2 = 1152$.

   (b) Ne kemi 4 blocke me 2 pike. Ne kete rast rendi i grupit G pjeseton $(2!)^4 \cdot 4! = 2^4 \cdot 24 = 384$.

   Por $[(1,2)(3,4),(1,2,3,4,5,6,7,8)] = (1,3,5,4,2) \in G$ ka rendin 5, dhe 5 nuk pjeseton 1152 as 384. Keshtu veprimi eshte primitiv.

6. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Nese rendi i grupit G eshte tek, grupi G eshte gjithmon abelian.

2. Nese rendi i grupit G eshte tek, nje nengrup $H < G$ me indeks 3 eshte gjithmon nje nengrup normal.

3. Nese dy elemente $a, b \in \mathrm{S}_5$ kane rendin 4, prodhimi ab i atyre nuk mund te kete rendin 4.

4. Nese nje grup G i fundem vepron 2-tranzitiv mbi nje bashkesi me n elemente, rendi i grupit G eshte gjithmon cift.

(12 pike)

Pergjigja: Ne kemi

1. Kundershembuj: Pohimi eshte vertet per grupet me rend < 21, por grupi $G := \langle(1,2,3,4,5,6,7),(2,3,5)(4,7,6)\rangle$ me rend 21 nuk eshte abelian. Nje kundershembull tjeter eshte $G := \langle(1,2,3),(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)\rangle$ me rend 81. Ka kundershembuj me rend p^3 per secilen numer prim $p \neq 2$.

2. Vertetim: Grupi G vepron tranzitiv mbi bashkesine e kosetave te djathte te nengrupit H, me shumezimin nga te djathten. Sepse ne kemi 3 koseta, imazhi i veprimit eshte izomorfik me nje nengrup e S_3, dhe sepse rendi i grupit G eshte tek, imazhi eshte izomorfik me C_3. Keshtu berthama e veprimit eshte pikerisht H, pra H eshte normal.

3. Vertetim: Te gjithe elemente $a, b \in \mathrm{S}_5$ e rendit te katert jane cikel me gjatesi 4, pra jane permutacione tek. Keshtu prodhimi i atyre eshte nje permutacion cift, pra nuk eshte nje cikel me gjatesi 4.

4. Vertetim: Le te jete S bashkesia me n elemente, dhe le te jete $x \in S$ nje pike. Grupi G vepron tranzitiv mbi S, pra n pjeseton $|G|$. Sepse G vepron 2-tranzitiv, ne te njejten menyre stabilizatori G_x vepron tranzitiv mbi bashkesine $S \setminus \{x\}$ me $n-1$ elemente. Pra $n-1$ pjeseton $|G_x|$, dhe $n(n-1)$ pjeseton $|G|$. Tani n apo $n-1$ eshte cift, pra edhe $|G|$ eshte cift.