MAT 551: Algebra I
Vjeshte 2011, Provim 1, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjeni

   1. $(1,2) \cdot (1,3) \cdot (1,4) \cdot (1,5)$,
   2. $(1,2)(3,4,5)(6,7) \cdot (1,2,3,4,5,6,7)$,
   3. $((1,2,3)(4,5))^{-1}$,
   4. $(1,2,3,4)^{(1,2,3,4,5,6)}$,
   5. $((1,3,5,7)(2,4)(6,8))^{100}$,
   6. $[(1,2,3),(1,2,4)]$,
   7. rendin e permutacionit $(1,2,3,4)(5,6)(7,8)$, dhe
   8. natyren e permutacionit $(1,2)(3,4,5,6)$ (cift apo tek?).

Pergjigja: Ne kemi

1. $(1,2) \cdot (1,3) \cdot (1,4) \cdot (1,5) = (1,2,3,4,5)$,
2. $(1,2)(3,4,5)(6,7) \cdot (1,2,3,4,5,6,7) = (1,3,5,4,6)$,
3. $((1,2,3)(4,5))^{-1} = (1,3,2)(4,5)$,
4. $(1,2,3,4)^{(1,2,3,4,5,6)} = (2,3,4,5)$,
5. $((1,3,5,7)(2,4)(6,8))^{100} = ()$,
6. $[(1,2,3),(1,2,4)] = (1,2)(3,4)$,
7. rendi i permutacionit $(1,2,3,4)(5,6)(7,8)$ eshte 4, dhe
8. permutacioni $(1,2)(3,4,5,6)$ eshte cift.

2. Gjeni permutacione a dhe b me

   1. $(1,2,3,4)^a = (1,4,3,2)$,
   2. $((2,4,6)(3,5,7))^b = (1,3,5)(4,6,8)$.

Pergjigja: Ne kemi per shembull $a = (2,4)$, $b = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)$.

3. Le te jete $G := \mathrm{C}_{30}$ grupi ciklik i rendit te 30.

   1. A eshte G nje grup abelian?
   2. Gjeni rendet e elementeve te grupit G.
   3. Gjeni numrin e elementeve e grupit G me rend 30.

Pergjigja: Grupi G eshte abelian, dhe rendet e elementeve jane 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 dhe 30. Numri i elementeve e rendit te 30 eshte $\varphi(30) = 8$.

4. Gjeni nengrupe te grupit S_6 me rendin 8, 36 dhe 120.

Pergjigja: Ne kemi per shembull

   1. $|\langle(1,2),(3,4),(5,6)\rangle| = 8$,
   2. $|\langle(1,2,3),(1,2),(4,5,6)(4,5)\rangle| = 36$ dhe
   3. $|\,\mathrm{S}_5\,| = 120$.

5. Nese grupi G ka nje numer cift elementesh, tregoni se ai ka nje numer tek elementesh te rendit te dyte.

Pergjigja: Le te jete G nje grup me rendin cift. Nese nje element $a \in G$ e cfaredoshem ka rendin > 2, ne kemi $a \neq a^{-1}$. Atehere elemente me rend > 2 vijne ne cifte, pra numri e atyre eshte cift. Por tani numri e elementeve e grupit G me rend $\leqslant 2$ eshte cift gjithashtu. Atehere G ka nje numer tek elementesh te rendit te dyte sepse saktesisht $1 \in G$ ka rendin 1.

6. Le te jete $G := \langle(1,3,5)(2,4,6),(1,4)(2,5)\rangle < \mathrm{S}_6$.

   1. A eshte G nje grup abelian?
   2. Gjeni te gjithe elementet e grupit G. – Sa eshte rendi i grupit G?
   3. Gjeni qenderzuesin $H := \mathrm{C}_G((1,4)(2,5)) < G$.
   4. A eshte H nje nengrup normal i grupit G?
   5. Gjeni nje nengrup i grupit S_4 i cili eshte izomorfik me G.

Pergjigja: Ne kemi:

   1. Grupi G nuk eshte abelian sepse $(1,4)(2,5)^{(1,3,5)(2,4,6)} \neq (1,4)(2,5)$.
   2. Te gjithe elementet e grupit G jane (), (2,5)(3,6), (1,2,3)(4,5,6), (1,2,6)(3,4,5), (1,3,2)(4,6,5), (1,3,5)(2,4,6), (1,4)(3,6), (1,4)(2,5), (1,5,6)(2,3,4), (1,5,3)(2,6,4), (1,6,2)(3,5,4) dhe (1,6,5)(2,4,3), pra rendi i grupit G eshte 12.
   3. Te gjithe elemente e grupit G te rendit te dyte nderrojne me $(1,4)(2,5)$. Por ne kemi pare akoma se G ka nje element me rendin 3 i cili nuk nderron me $(1,4)(2,5)$. Atehere $4 \mid |H|$ dhe $|H| \mid |G| = 12$, por $H \neq G$. Pra ne kemi $|H| = 4$, dhe $H = \langle(1,4)(2,5),(2,5)(3,6)\rangle \cong \mathrm{V}_4$.
   4. Nengrupi H permban te gjithe elementet te rendit te dyte e grupit G, dhe ai nuk ka elemente te tjera pervec (). Pra nengrupi H eshte normal.
   5. Nengrupi i vetme e grupit S_4 me rend 12 eshte A_4, pra ne kemi $G \cong \mathrm{A}_4$.