MAT 551: Algebra I
Vjeshte 2011, Provim 2, Pergjigje

Stefan Kohl

1. Gjeni rendet $|\mathrm{V}_4|$, $|\mathrm{D}_4|$, $|\,\mathrm{A}_5\,|$ dhe $|\,\mathrm{GL}(2,2)|$. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $|\mathrm{V}_4| = 4$, $|\mathrm{D}_4| = 8$, $|\,\mathrm{A}_5\,| = 60$ dhe $|\,\mathrm{GL}(2,2)| = 6$.

2. Gjeni indekset $[\mathrm{S}_4 : \mathrm{D}_4]$, $[\mathrm{A}_5 : \mathrm{V}_4]$, $[\mathrm{A}_6 : \mathrm{V}_4]$ dhe $[\mathrm{S}_6 : \mathrm{D}_6]$. (4 pike)

Pergjigja: Ne kemi $[\mathrm{S}_4 : \mathrm{D}_4] = \frac{24}{8} = 3$, $[\mathrm{A}_5 : \mathrm{V}_4] = \frac{60}{4} = 15$, $[\mathrm{A}_6 : \mathrm{V}_4] = \frac{360}{4} = 90$ dhe $[\mathrm{S}_6 : \mathrm{D}_6] = \frac{720}{12} = 60$.

3. Gjeni te gjithe klasat e konjugimit e nengrupeve te grupit S_4. (6 pike)

Pergjigja: Klasat e konjugimit e nengrupeve te grupit S_4 jane

1. $\{1\}$,
2. $\langle(1,2)\rangle^{\mathrm{S}_4} = (\mathrm{C}_2, -)^{\mathrm{S}_4}$,
3. $\langle(1,2)(3,4)\rangle^{\mathrm{S}_4} = (\mathrm{C}_2, +)^{\mathrm{S}_4}$,
4. $\langle(1,2,3)\rangle^{\mathrm{S}_4} = {\mathrm{C}_3}^{\mathrm{S}_4}$,
5. $\langle(1,2,3,4)\rangle^{\mathrm{S}_4} = {\mathrm{C}_4}^{\mathrm{S}_4}$,
6. $\langle(1,2),(3,4)\rangle^{\mathrm{S}_4} = (\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2, -)^{\mathrm{S}_4}$,
7. $\{\mathrm{V}_4\}$,
8. $\langle(1,2,3),(1,2)\rangle^{\mathrm{S}_4} = {\mathrm{S}_3}^{\mathrm{S}_4}$,
9. $\langle(1,2,3,4),(1,3)\rangle^{\mathrm{S}_4} = {\mathrm{D}_4}^{\mathrm{S}_4}$,
10. $\{\mathrm{A}_4\}$ dhe
11. $\{\mathrm{S}_4\}$.

4. Le te jete G nje grup te thjeshte i cili vepron tranzitiv mbi bashkesine $\{1,\dots,11\}$ dhe supozoni se stabilizatori G_{11} ka nje nengrup me indeks 2 i cili eshte izomorfik me A_6. Gjeni rendin e grupit G. (3 pike)

Pergjigja: Ne kemi $|G| = [G : G_{11}] \cdot 2 \cdot |\,\mathrm{A}_6\,| = |11^G| \cdot 2 \cdot \frac{6!}{2} = 11 \cdot 2 \cdot 360 = 7920$.

5. Tregoni se S_6 ka nje nengrup i cili eshte izomorfik me S_4 dhe i cili vepron tranzitiv mbi $\{1,2,3,4,5,6\}$. (3 pike)

Pergjigja: Le te jete φ veprimi e grupit S_4 mbi bashkesine e kosetave te djathte te nengrupit $H := \langle(1,2,3,4)\rangle < G$ me shumezimin nga te djathten. Ne dime se veprimi φ eshte tranzitiv, nengrupi H ka indeks 6 ne G dhe ne kemi $H \cap H^{(3,4)} = 1$. Pra $\ker\varphi = 1$ dhe $\mathrm{S}_6 > \operatorname{im}\varphi \cong \mathrm{S}_4$.

6. Vertetoni apo gjeni kundershembuj:

1. Nese te gjithe nengrupet $H \lneq G$ e grupit G jane abelian, edhe grupi G eshte abelian.
2. Per grupet G dhe $H < G$, centralizatori $\mathrm{C}_G(H)$ eshte gjithmon nje grup abelian.
3. Per grupet G dhe $H < G$, ne kemi gjithmon $\mathrm{C}_G(H) \lhd \mathrm{N}_G(H)$.
4. Nje grup i fundem nuk mund te veproje mbi nje bashkesi te pafundem.
5. Nese nje grup G i fundem vepron tranzitiv mbi nje bashkesi me n elemente, rendi i tij eshte i pjesetueshem me n.

(10 pike)

Pergjigja: Ne kemi

1. Kundershembull: $G = \mathrm{S}_3$.
2. Kundershembull: $G = \mathrm{S}_3$, $H = 1$.
3. Eshte vertet: normalizatori $\mathrm{N}_G(H)$ vepron mbi H me konjugimin, berthama e veprimit eshte $\mathrm{C}_G(H)$, dhe berthamat e homomorfizmave jane nengrupe normal.
4. Kundershembuj: te gjithe grupet mund te veproje mbi te gjithe bashkesite me veprimin trivial.
5. Eshte vertet: nese nje grup G vepron tranzitiv mbi nje bashkesi S me n elemente nje nder te cilet eshte x, stabilizatori $G_x < G$ e pikes x ka indeks n ne G dhe ne kemi $|G| = [G : G_x] \cdot |G_x| = n \cdot |G_x|$.